

Zweidimensionales, akustisches Design zwischen Schalenelementen eines Flugzeugrumpfs mittels Topologieoptimierung

Martin Radestock¹, Michael Rose², Hans Peter Monner³

¹ Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 38108 Braunschweig, Deutschland, Email: Martin.Radestock@dlr.de

² Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 38108 Braunschweig, Deutschland, Email: Michael.Rose@dlr.de

³ Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 38108 Braunschweig, Deutschland, Email: Hans.Monner@dlr.de

Einleitung

Bei der Findung von optimalen Leichtbaukonstruktionen kommt es oftmals auf die Erfahrung von beteiligten Personen an. Lassen sich diese Problemstellungen mit Ihren entsprechenden Randbedingungen mathematisch vollständig beschreiben, so kann mit Hilfe eines Algorithmus ein optimales Design für ein Bauteil gefunden werden, das bei minimalem Materialeinsatz den äußeren Belastungen standhält. Bei diesem Verfahren handelt es sich um die Topologieoptimierung, welche sehr häufig im Rahmen von Strukturoptimierungen eingesetzt wird[1],[2]. Da es einen direkten Zusammenhang zwischen der Elementsteifigkeit und dem verteilten Material gibt, ist dieses Verfahren im Rahmen der Steifigkeitsoptimierung sehr ausgereift und weit verbreitet. Auf Grund des bekanntermaßen häufig ungünstigen akustischen Verhaltens von Leichtbaukonstruktion, ist eine Anpassung der Zielfunktion auf akustische Problemstellungen von hohem Interesse. Im Rahmen dieses Artikels wird diese Anpassung beschrieben. Dazu zählt die Beschreibung des Materials im Zusammenhang mit der Helmholtz-Differentialgleichung und die Formulierung der Topologieoptimierung. Abschließend werden zwei Beispiele vorgestellt und die Ergebnisse diskutiert.

Grundlegende akustische Annahmen für die Optimierung

Der Ansatz für die Akustik im zweidimensionalen Raum ist die Helmholtz-Differentialgleichung [3].

$$\Delta p(r) + k^2 p(r) = 0 \quad (1)$$

Hierbei ist Δ der Laplace Operator, p der Schalldruck, k die Wellenzahl und r die Ortskoordinate für den Schalldruck. Für die Optimierung wird der Schalldruck als zu minimierende Schallgröße gewählt. Die Wellenzahl k enthält die Kennkreisfrequenz ω und die Schallgeschwindigkeit c , welche vom Material abhängt.

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \left[\frac{1}{m} \right] \quad (2)$$

Für die Materialverteilung muss die Schallgeschwindigkeit für Luft und ein festes Material beschrieben werden. Die Schallgeschwindigkeit in Luft c_{gas} ist über den adiabatischen Kompressionsmodul K und die Dichte ρ definiert.

$$c_{gas} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (3)$$

Bei dem festen Material muss die Schallgeschwindigkeit auch nur durch Materialgrößen beschreibbar sein. Das gilt jedoch nur für die Longitudinalgeschwindigkeit c_{solid} , die über das Elastizitätsmodul E , die Dichte ρ und die Querkontraktionszahl ν definiert ist.

$$c_{solid} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (4)$$

Die verwendeten Materialien sind zum einen Luft mit der Dichte $\rho_{Luft} = 1.2 \text{ kg/m}^3$, dem Kompressionsmodul $K_{Luft} = 1.42e5 \text{ Pa}$ und als Festkörper Aluminium mit der Dichte $\rho_{Al} = 2700 \text{ kg/m}^3$, dem Elastizitätsmodul $E = 70e9 \text{ Pa}$ und der Querkontraktionszahl $\nu = 0.33$. Eine direkte Beziehung zwischen Kompressionsmodul und Elastizitätsmodul bzw. zwischen den Dichten in den Gleichungen (3) und (4) kann nicht hergestellt werden. Durch die Vernachlässigung der Querkontraktionszahl entsteht ein Fehler von ca. 16 % bei der Schallgeschwindigkeit im Aluminium. Die Designvariable ξ beschreibt in der Optimierung den Übergang zwischen der Schallgeschwindigkeit von Luft und Aluminium. In einem Wertebereich von 0 bis 1 wird für die Designvariable folgende Beziehung verwendet.

$$c = c_{gas} + (c_{solid} - c_{gas})\xi(r)^p \quad \left[\frac{m}{s} \right] \quad (5)$$

Der Faktor p ist ein Bestrafungsfaktor, der die Schallgeschwindigkeit stärker zu Ihren Randwerten zwingt. Die Designvariable variiert kontinuierlich in ihrem Wertebereich und durch den Bestrafungsfaktor entstehen weniger Zonen mit Zwischenmaterial, deren Schallgeschwindigkeit zwischen der von Luft und Aluminium liegt [4].

Formulierung der Topologieoptimierung

In mathematische Form wird die Topologieoptimierung mit Zielfunktion und Nebenbedingungen wie folgt zusammengefasst.

$$\min_{\xi} \delta = \min_{\xi} \frac{1}{\int_{\Xi_{tar}} dr} \int_{\Xi_{tar}} |p(r, \xi(r))|^2 dr \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{1}{\int_{\Xi_{des}} dr} \int_{\Xi_{des}} \frac{\xi(r)}{\beta} dr - 1 \leq 0 \quad (7)$$

$$0 \leq \xi(r) \leq 1 \quad (8)$$

Hierbei ist δ die Zielfunktion, Ξ_{tar} der Zielbereich auf den ein Raum optimiert wird, Ξ_{des} ist der Designbereich in dem Material verteilt werden kann und β der Füllgrad für den Designbereich. Die Formulierung ist ähnlich zur bestehenden Literatur [5], [6]. Es wird als Zielfunktion nur lokal der Schalldruck minimiert und nicht global in der gesamten Raum. Am Beispiel eines einfachen Rechteckraums werden die relevanten Bereiche aus der mathematischen Beschreibung erklärt. Der Raum ist in Abbildung 1 dargestellt. Der gelb umrandete Bereich stellt mit den Elementen den zu minimierenden Zielbereich Ξ_{tar} dar. Im oberen Bereich dieses Raumes ist ein dunkelgrauer Bereich Ξ_{des} definiert, in dem die Materialverteilung erfolgen soll. Nur diese Elemente können kontinuierlich verändert werden. Alle anderen Elemente besitzen die Eigenschaft von Luft. Die Erregung für diesen Raum wird durch eine Punktquelle mit dem Radius von 0,1m und einer Oberflächengeschwindigkeit von 0,01 m/s modelliert.

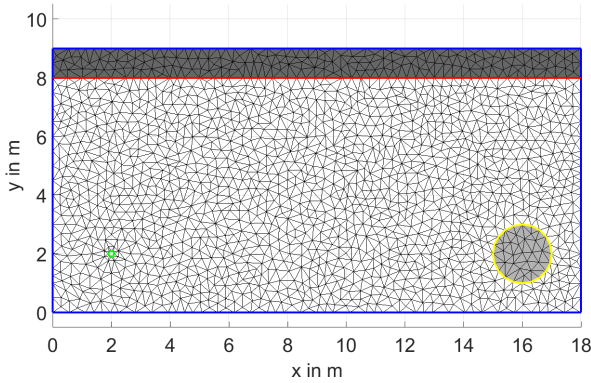


Abbildung 1: Vernetzter 2D Raum für die Topologieoptimierung

Das Netz wird mit Hilfe einer Delauny Triangulation berechnet [7]. Hierbei können u.a. bestimmte Randbereiche, der maximale Flächeninhalt und der minimale Dreieckswinkel vorgegeben werden. Weiterhin besitzen die Elemente eine quadratische Ansatzfunktion mit der die FE Berechnung stattfindet. Zur Aktualisieren der Elemente wird ein gängiger Algorithmus in der Topologieoptimierung verwendet. Die "method of moving asymptotes" (MMA) ist ein gradientenbasiertes Verfahren, welches die Zielfunktion und die Nebenbedingungen berücksichtigt [8].

Sensitivitätsanalyse

Für die Aktualisierung der Variablen ist aufgrund des gradientenbasierten Verfahrens eine Sensitivität notwendig. Diese muss sowohl für die Zielfunktion als auch für die Nebenbedingungen erstellt werden. Allgemein ist die Beschreibung für die FE Berechnung linear und kann über eine komplexe Systemmatrix S , den komplexen Druckvektor p und dem komplexen Anregungsvektor f ausgedrückt werden. Die fett gekennzeichneten Symbole

markieren Vektoren oder Matrizen.

$$S(\xi)p(\xi) = f \quad (9)$$

Aufgrund der impliziten Beziehung zwischen Designvariable und Zielfunktion wird die adjoint state method angewendet [9]. Dazu wird die Zielfunktion mit Nulltermen erweitert.

$$\delta = \delta + \lambda^T (Sp - f) + \bar{\lambda}^T (\bar{S}\bar{p} - \bar{f}) \quad (10)$$

Hierbei ist λ ein komplexer Vektor, der zunächst frei wählbar ist, T markiert den transponierten Vektor und die überstrichene Variablen sind komplex konjugierte Größen. Die Sensitivität für die Zielfunktion δ lässt sich in der folgenden Form beschreiben. Die Berechnung erfolgt in Anlehnung an die Literatur [5],[6].

$$\frac{d\delta}{d\xi} = \frac{\partial\delta}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta}{\partial p_{re}} \frac{\partial p_{re}}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta}{\partial p_{im}} \frac{\partial p_{im}}{\partial\xi} \quad (11)$$

Der Anteil "re" beschreibt den Realteil des komplexen Druckvektors und "im" den Imaginärteil. Um partiellen Ableitungen zu entgehen, die nicht bestimmbar sind, wird der komplexe Vektor λ wie folgt gewählt.

$$\lambda^T S = - \left(\frac{1}{\int_{\Xi_{tar}} dr} \int_{\Xi_{tar}} (p_{re} - j p_{im}) dr \right) \quad (12)$$

Um den komplexen Vektor zu ermitteln, wird eine weitere Rechnung durchgeführt. Vereinfacht ausgedrückt wird im Zielbereich Ξ_{tar} die negativ komplex konjugierte Lösung der Ausgangsrechnung als Anregungsvektor genutzt, um eine zweite Lösung für das Schalldruckfeld zu generieren. Die Sensitivität vereinfacht sich mit dem Vektor λ dann zur folgenden Formulierung.

$$\frac{d\delta}{d\xi} = \frac{\partial\delta}{\partial\xi} + 2Re \left[\lambda^T \frac{\partial S}{\partial\xi} p \right] \quad (13)$$

Auch zur Nebenbedingung muss eine Ableitung gebildet werden. Diese lässt sich direkt beschreiben und hängt für jedes Element im Designbereich Ξ_{des} von der Volumengrenze ab.

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\int_{\Xi_{des}} dr} \int_{\Xi_{des}} \frac{\xi(r)}{\beta} dr - 1 \right) = \frac{1}{\beta} \quad (14)$$

FE Analyse

Eine wesentlich Herausforderung für die Sensitivitätsanalyse ist die partielle Ableitung der Systemmatrix nach der Designvariablen. Da die meisten kommerziellen Programme, wie z.B. ANSYS®, über diese Funktion nicht verfügen, muss eine eigene FE-Berechnung implementiert werden. Dazu wurde in einer MATLAB®-Umgebung die Beschreibung objektorientiert über ein MEX-plugin direkt bereit gestellt. Dieses Vorgehen wurde gewählt, um die MATLAB® Umgebung mit ihren Vorteilen in Vektor- und Matrixoperationen auszunutzen. Die mathematische Beschreibung zur Umsetzung der Helmholtz-Differentialgleichung für ein FE-Netz folgt der Literatur [10] und wird nicht weiter beschrieben.

Simulationsbeispiele

Das erste Simulationsbeispiel ist der Rechteckraum aus Abbildung 1. Dazu sind zum einen der Amplituden-Frequenzgang in Abbildung 2 und die Eigenfrequenz des Raumes bei 34.45 Hz in Abbildung 3 dargestellt. Diese Frequenz wurde frei gewählt und es soll gezeigt werden, dass der Schalldruck in dem Raum bei dieser Eigenfrequenz für den eingekreisten Bereich reduziert wird.

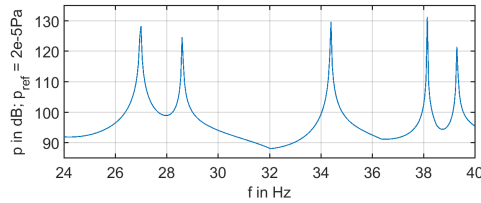


Abbildung 2: Amplituden-Frequenzgang des Rechteckraumes ohne eine Materialverteilung

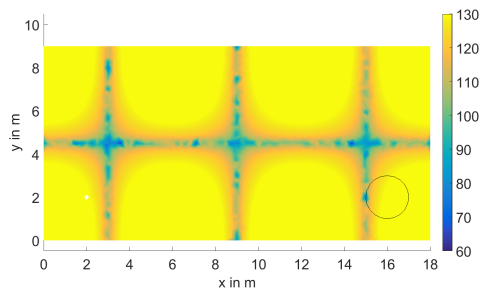


Abbildung 3: Eigenfrequenz des Rechteckraumes bei 34.45 Hz ohne Materialverteilung

Der Amplituden-Frequenzgang für das optimierte Design ist in Abbildung 4 und die Schalldruckverteilung bei 34.45 Hz ist in Abbildung 5 dargestellt. Es zeigen sich klar definierte, schwarze Elemente, in denen Material vorhanden ist. Hier zeigt sich jedoch schon eine Herausforderung, wenn diese Strukturen gefertigt werden sollen. Es gibt Elemente, die frei im Raum liegen und keine Verbindung zu anderen Elementen besitzen. Außerdem lässt sich im Amplituden-Frequenzspektrum erkennen, dass die Eigenfrequenz sich durch die Materialverteilung verschoben hat.

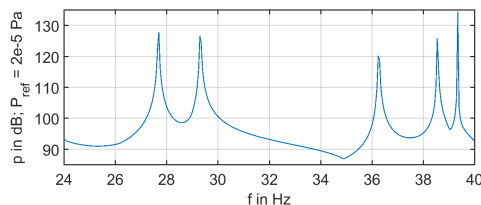


Abbildung 4: Amplituden-Frequenzgang des Rechteckraumes mit optimierter Materialverteilung

Daher ist die Anwendung der Topologieoptimierung eher für tonale Anwendungen oder für ein schmales Frequenzband zu sehen, in dem Spitzen im Schalldruck reduziert werden können. Das zweite Beispiel bezieht sich daher

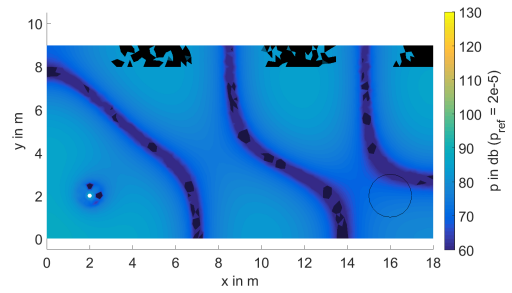


Abbildung 5: Schalldruckverteilung des Rechteckraumes bei 34.45 Hz mit optimierter Materialverteilung

auf einen Flugzeugrumpf ähnlich einer Airbus 320, die tonal angeregt werden kann. (Abbildung 6). Die Erregung soll der power control unit(PCU) entsprechen, die zur Steuerung der Klappen und Steuerflächen eine tonale Anregung bei ca. 800 Hz erzeugt. Hier soll im approxi-

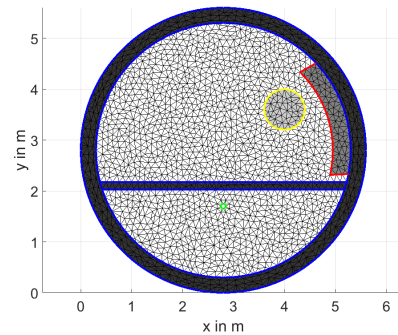


Abbildung 6: Aufbau der Rumpftonne

mierten Kopfbereich der Passagiere der Schalldruck vermindert werden. Dazu kann im rot abgegrenzten Bereich Material verteilt werden, in dem das Kabinenlining sich befindet. Die blauen Begrenzungen zeigen die Rumpftonne und den Boden des Flugzeugs und werden im Rahmen der Topologieoptimierung konstant als volles Material gerechnet. Die Erregung wird durch eine konstante Oberflächengeschwindigkeit realisiert. Diese ist nicht identisch mit der Anregungsstärke durch die PCU. In Abbildung 7 ist der mittlere Schalldruck im Zielbereich dargestellt, in dem sich drei Spitzen ausbilden. Der Schalldruck bei 800 Hz ist in Abbildung 8 ohne Materialverteilung dargestellt.

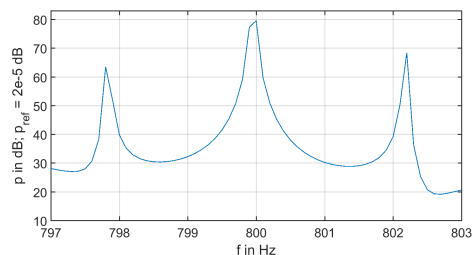


Abbildung 7: Amplituden-Frequenzgang des mittleren Schalldrucks im Zielbereich der Rumpftonne

Für die Optimierung wurde der Frequenzbereich von

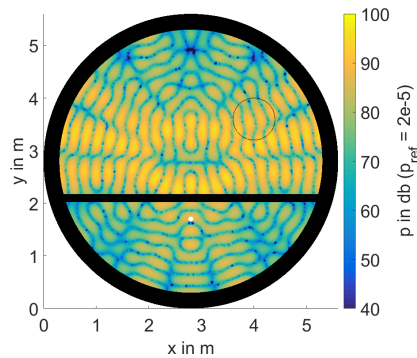


Abbildung 8: Schalldruckverteilung in der Tonne bei 800 Hz

797 Hz bis 803 Hz vorgegeben, da hier die Spitzen im Amplituden-Frequenzgang minimiert werden sollen. Abbildung 9 zeigt sowohl die vorgegebenen Frequenzen als auch den Amplituden-Frequenzgang der optimierten Struktur. Wichtig ist daher auch die Schalldruckverteilung für die maximal auftretende Amplitude, die in Abbildung 10 dargestellt ist.

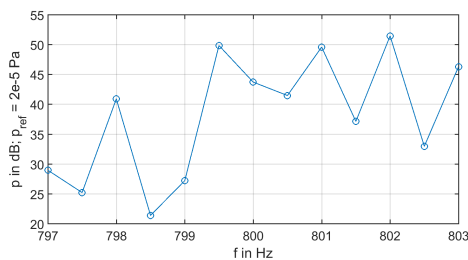


Abbildung 9: Amplituden-Frequenzgang des mittleren Schalldrucks im Zielbereich mit optimierter Materialverteilung

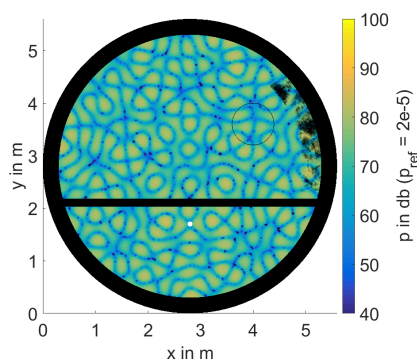


Abbildung 10: Schalldruckverteilung in der Tonne für die maximal auftretende Amplitude bei 802 Hz

Das Ergebnis ist bei diesem Beispiel nicht so eindeutig wie zuvor. Es gibt noch graue Bereiche und auch losgelöste Teile, die frei im Raum hängen. Jedoch zeigt die Materialverteilung schon den Einfluss auf den Schalldruck, wobei hier nur die Helmholtz-Differentialgleichung umgesetzt wurde. Effekte durch unterschiedliche Impedanzen wurden bisher noch nicht berücksichtigt. Der Übergang an Elementen mit unterschiedlichen Impedanzen verur-

sacht u.a. eine teilweise Reflektion, die durch reine Variation der Schallgeschwindigkeiten in der Helmholtz-Differentialgleichung nicht abgedeckt ist.

Fazit

Auf Basis einer Topologieoptimierung wurde eine akustische Optimierung erzielt, die mit einer Materialverteilung Einfluss auf den Schalldruck eines Raumes nimmt. Dabei wird direkt die Helmholtz-Differentialgleichung verändert, wobei die Materialverteilung voranging die Verschiebung von z.B. Eigenfrequenzen eines geschlossenen Raumes vornimmt. Am Beispiel eines Rechteckraums und eines approximierten Flugzeugrumpfes mit tonaler Erregung wird die Topologieoptimierung angewendet. Weiterführende Arbeiten sind die Umsetzung von Impedanzübergängen in der Optimierung und Algorithmen zur Vermeidung von frei liegendem Material.

Literatur

- [1] Zhu, J.-H., Zhang, W.-H. und Xia, L.: Topology optimization in aircraft and aerospace structures design. Archives of Computational Methods in Engineering (2016), 595–622
- [2] Krog, L., Tucker, A., Kemp, M. und Boyd, R.: Topology optimisation of aircraft wing box ribs. 10th AIAA/ISSMO multidisciplinary analysis and optimization conference (2004), 4481 .
- [3] Kuttruff, H.: Room acoustics. Spon Press, London, 2009
- [4] Bendsøe, M. P. und Sigmund, O.: Topology optimization: Theory, methods, and applications. Springer, Berlin, 2004
- [5] Dühring, M. B., Jensen, J. S. und Sigmund, O.: Acoustic design by topology optimization. Journal of Sound and Vibration (2008), 557–575
- [6] Jensen, J. S. and Sigmund, O.: Systematic design of acoustic devices by topology optimization. ICSV12 Proceedings (2005)
- [7] Shewchuk, J. R.: Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering (1996), 203–222, URL: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
- [8] Svanberg, K.: The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. International journal for numerical methods in engineering (1987), 359–373
- [9] Tortorelli, D. A. und Michaleris, P.: Design sensitivity analysis: Overview and review. Inverse Problems in Engineering (1994), 71–105
- [10] Ihlenburg, F.(Ed.): Finite Element Analysis of Acoustic Scattering. Springer-Verlag New York Inc, New York, 1998